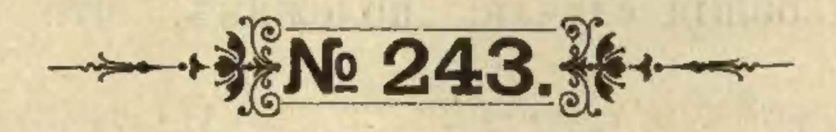
XXI Сем. № 3.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Машина Л. Торре

ДЛЯ РѢШЕНІЯ УРАВНЕНІЙ *).

Къ числу приборовъ, служащихъ для механическаго производства математическихъ манипуляцій, прибавился новый, очень оригинальный и остроумный приборъ для рѣшенія уравненій, принадлежащій испанскому инженеру Лоренцо Торре.

Еще въ 1871 году французскій ученый Марсель Депре**) предлагалъ для устройства приборовъ, могущихъ служить для рѣшенія уравненій, воспользоваться разложеніемъ въ ряды $\sin x^m$ и $\cos x^m$, которое и воспроизвести механически. Насколько трудно оказалось устроить подобную машину, можно судить по тому, что до настоящаго времени мы не имѣемъ даже образца такой машины.

Гораздо удачнѣе рѣшилъ эту задачу ученый испанскій инженеръ.

*) 1) Note sur la machine à résoudre les équations de M. Torrès par Maurice d'Ocagne.

2) A. Gay. Révue générale des Sciences № 15 p. 684; année 1896.

3) Torrès Comptes Rendus t 121 p. 245 an. 1895.

**) M. Déprez. Comptes Rendus t 63 p. 785 an. 1871.

Хотя построенный Торре образецъ предназначенъ только для рѣшенія уравненій вида:

$$x^9 + ax^8 = c,$$

$$x^9 + bx^7 = d,$$

гдѣ a, b, c и d суть числа, большія нуля, однако принципъ, положенный въ основаніе этой машины, настолько общъ, что допускаетъ возможность построенія машинъ для нахожденія дѣйствительныхъ (положительныхъ и отрицательныхъ) и мнимыхъ корней алгебраическихъ и трансцендентныхъ уравненій какихъ угодно степеней и даже системъ такихъ уравненій съ любымъ числомъ неизвѣстныхъ.

Для уясненія лежащаго въ основаніи машины Торре принципа разсмотримъ самый общій случай: положимъ, что надо найти корни уравненія

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} x + A_m = 0.$$

Механическое рѣшеніе состоитъ, очевидно, въ томъ, чтобы соединить надлежащимъ образомъ прилично выбранныя $m+1$ подвижныя части, изъ которыхъ каждая соотвѣтствовала бы одной изъ $m+1$ перемѣнныхъ A_1, A_2, $A_3, \ldots . A_m$ и x.

Движенія должны быть выбраны такимъ образомъ, чтобы они могли выражать всякія значенія перемѣнныхъ, которыя могутъ мѣняться отъ $-\infty$ до $+\infty$. Не трудно видѣть, что болѣе всего пригодно для этой цѣли движеніе круговое, хотя и относительно него приходится сдѣлать небольшую оговорку: если вращенія тѣлъ, которыя мы выберемъ, считать пропорціональными величинамъ перемѣнныхъ, то при очень большихъ значеніяхъ этихъ послѣднихъ можетъ оказаться необходимымъ сдѣлать столько оборотовъ, что на практикѣ придется, пожалуй, признать это невозможнымъ. Торре, во избѣжаніе этого могущаго встрѣтиться затрудненія, предполагаетъ упомянутыя движенія пропорціональными не самимъ величинамъ, а нѣкоторымъ, соотвѣтственно выбраннымъ, ихъ функціямъ.

Какъ же выбрать такую функцію?

Если мы возьмемъ круговое движеніе, то перемѣнныя выразятся нѣкоторыми функціями отъ угловъ и въ простѣйшемъ видѣ смогутъ быть представлены такимъ образомъ:

$$\alpha_n = 2k_n \pi + \beta_n = \mu A_n,$$

гдѣ μ — нѣкоторое постоянное количество. Не трудно показать, что такой выборъ вида функціи хотя и простъ, но не совсѣмъ удаченъ, потому что здѣсь увеличеніе угла какъ разъ пропорціонально увеличенію перемѣнной или, съ точки зрѣнія ошибокъ, абсолютная ошибка остается постоянной, такъ какъ всякому увеличенію dA_n соотвѣтствуетъ одинаковое увеличеніе угла, въ то время какъ относительная ошибка мѣняется. Поэтому относительныя ошибки, при возрастаніи или убываніи перемѣнной, могутъ возрастать или убывать до невѣроятныхъ почти предѣловъ. Гораздо раціональнѣе, поэтому, выбрать такую функцію, для которой относительная ошибка не измѣнялась бы, т. е. если dA_n — безконечно малое приращеніе A_n, то

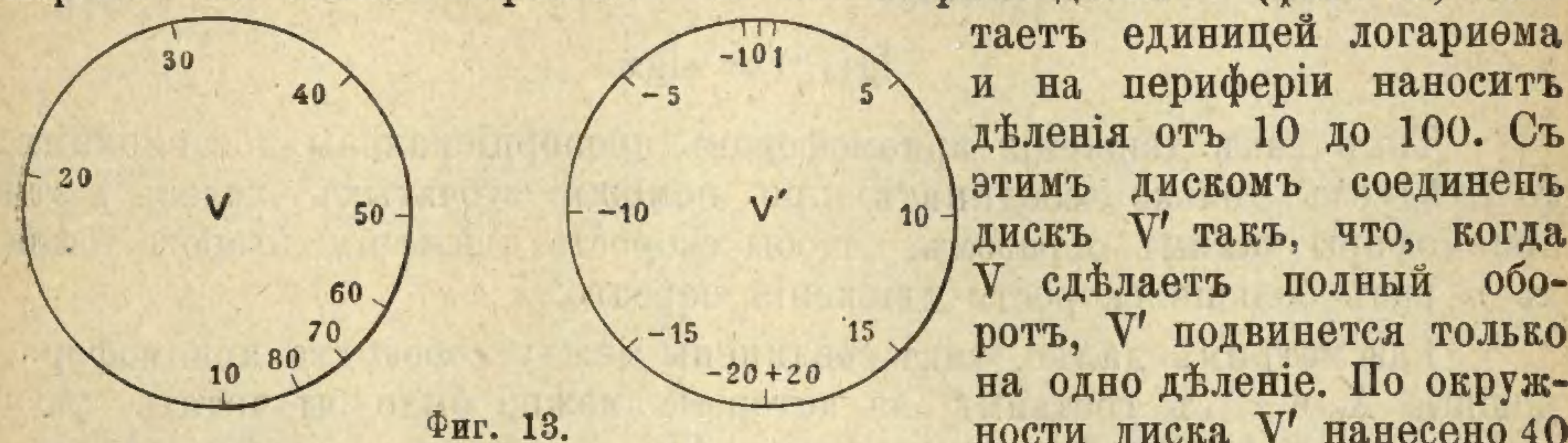
$$\lambda d\alpha_n = \frac{d\mathrm{A}_n}{\mathrm{A}_n}.$$

Интегрируя, получимъ:

$$\alpha_n = 2k_n\pi + \beta_n = \log_{\lambda_1} \mathrm{A}_n$$

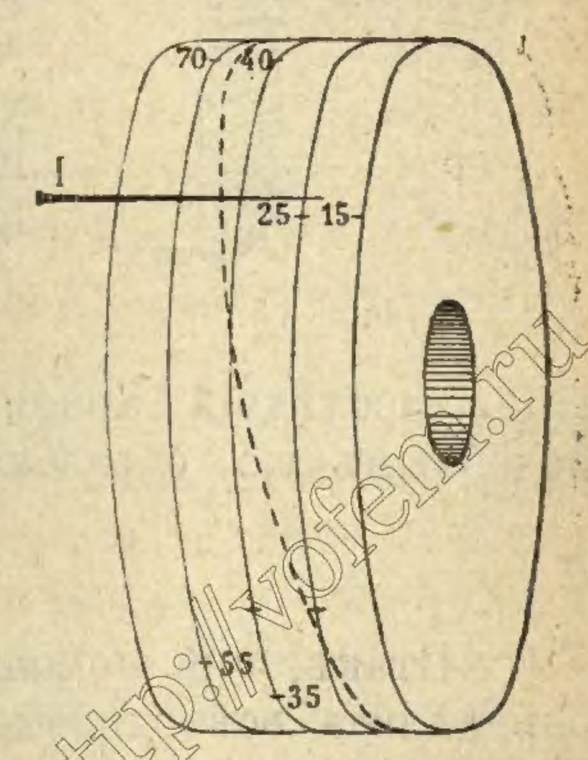
здѣсь $\lambda_1 = e^\lambda$, а e—основаніе неперовыхъ логариѳмовъ. Итакъ, за функцію, которой должны быть пропорціональны движенія машины, надо принять *логариѳмъ*. Для простоты устройства своей машины Торре принялъ $e^\lambda = 10$.

Пользуясь, далѣе, тѣмъ, что логариѳмическая функція періодична, если умножать число послѣдовательно на основаніе, Торре изображаетъ перемѣнныя такимъ образомъ: полный оборотъ диска V (фиг. 13) считаетъ единицей логариѳма и на периферіи наноситъ дѣленія отъ 10 до 100. Съ этимъ дискомъ соединенъ дискъ V′ такъ, что, когда V сдѣлаетъ полный оборотъ, V′ подвинется только на одно дѣленіе. По окружности диска V′ нанесено 40 дѣленій 0,1,2 ... 19,20,—20,—19 .... —3,—2—1. Такимъ образомъ дискъ V′ послужитъ для указанія цѣлаго числа логариѳмовъ, а V его десятыхъ долей. Легко видѣть, что интерваллъ, въ которомъ могутъ мѣняться перемѣнныя, простирается отъ 10^{-20} до 10^{+20}, каковой предѣлъ на практикѣ можно считать вполнѣ достаточнымъ. Чтобы найти количество, соотвѣтствующее показаніямъ дисковъ V и V′, разсуждаютъ такимъ образомъ: при полномъ оборотѣ диска V въ ту или другую сторону логариѳмъ увеличивается или уменьшается на единицу, что соотвѣтствуетъ умноженію или дѣленію выражаемаго логариѳмомъ числа на 10 или, какъ чаще говорятъ, переносу запятой вправо или влѣво на одну цифру (дискъ V′ въ это время показываетъ число 1). Такимъ образомъ, когда на дискѣ V′ противъ индекса будетъ стоять цифра p или $-p$, то въ числѣ, логариѳмъ котораго находится противъ индекса на дискѣ V, надо запятую перенести на p цифръ вправо или влѣво, считая отъ крайней лѣвой цифры. Такую систему двухъ дисковъ Торре называетъ *логариѳмическимъ ариѳмофоромъ*.



Фиг. 13.

Описанный только что ариѳмофоръ представляетъ самую простую комбинацію. На самомъ дѣлѣ дискъ V можетъ быть замѣненъ винтовой поверхностью или барабаномъ (фиг. 14), съ нанесенными на немъ по винтовой линіи дѣленіями, сочлененнымъ съ V′ такимъ образомъ, что этотъ послѣдній поворачивается на одно дѣленіе только послѣ нѣсколькихъ (n) полныхъ оборотовъ барабана (въ построенномъ образцѣ



Фиг. 2.

послѣ четырехъ оборотовъ); такое сочетаніе даетъ возможность произвольно увеличивать степень точности отсчетовъ. Чтобы не ошибиться, въ какомъ именно мѣстѣ барабана надо дѣлать отсчетъ, Торре подъ индексомъ I заставляетъ, одновременно съ барабаномъ, двигаться цилиндръ со спиралевиднымъ прорѣзомъ, изображеннымъ на фиг. 14 пунктиромъ, со скоростью въ n разъ меньшею скорости вращенія барабана. Искомое число придется тогда въ мѣстѣ пересѣченія этого прорѣза съ индексомъ.

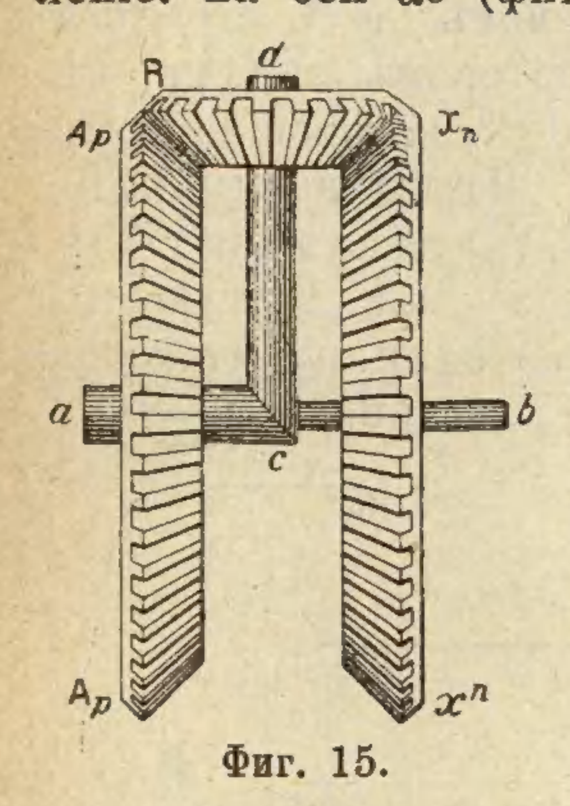
Итакъ, при помощи указанныхъ ариѳмофоровъ можно всякое число представить очень просто и съ желаемымъ приближеніемъ.

Для соединенія двухъ ариѳмофоровъ такимъ образомъ, чтобы въ то время, когда первый показываетъ x, второй показывалъ бы x^n, примѣнена слѣдующая зависимость:

$$\lg(x^n) = n \lg x$$

Такъ какъ движенія ариѳмофоровъ пропорціональны логариѳмамъ, то слѣдуетъ только соединить при помощи зубчатыхъ колесъ*) эти ариѳмофоры такимъ образомъ, чтобы скорость движенія второго была въ n разъ больше скорости движенія перваго.

Разсмотримъ далѣе, какъ соединены между собою два ариѳмофора, дающіе A_p и x^n съ третьимъ, на которомъ можно было бы читать сразу произведеніе $A_p x^n$. Для этой цѣли у Торре сдѣлано такое приспособленіе: на оси ab (фиг. 15) надѣты 3 муфты на первыя двѣ насажены зубчатыя колеса, соединенныя съ ариѳмофорами, дающими A_p и x^n; на третьей же, средней находится стержень съ зубчатымъ колесомъ R. сочлененнымъ подъ угломъ съ первыми двумя. Если обозначимъ перемѣщенія колесъ A_p, x_n и R около оси ab соотвѣтственно черезъ m, n и a, то очевидно: $2a = m + n$. Колесо A соединено съ нѣкоторымъ ариѳмофоромъ X_n, построеннымъ такимъ образомъ, чтобы угловая единица его была вдвое менѣе угловой единицы первыхъ двухъ. Итакъ, перемѣщенія будутъ пропорціональны: $\frac{1}{2}\lg X_n$, $\lg A_p$ и $\lg x^n$ и предыдущее равенство приметъ видъ:



Фиг. 15.

$$\lg X_n = \lg A_p + \lg x^n = \lg(A_n x^n),$$

т. е. послѣдній ариѳмофоръ и будетъ искомый. Конечно, соединяя подобнымъ же образомъ большее число ариѳмофоровъ, можно найти

$$A_n x^n y^p, \; A_n x^n y^p z^q \text{ и т. д.}$$

Итакъ, при помощи описанныхъ ариѳмофоровъ можно механически опредѣлить всѣ одночлены: $A_m x^m$, $A_n x^n$, $A_p x^p$, ...

---

*) Въ машинѣ Торре всѣ соединенія сдѣланы исключительно при помощи зубчатыхъ колесъ, съ одной стороны, во избѣжаніе ошибокъ, могущихъ произойти отъ скольженія, а съ другой, чтобы сдѣлать движенія обратимыми, т. е. если перемѣщеніе dA колеса A производитъ въ колесѣ B перемѣщеніе dB, то чтобы и обратное имѣло мѣсто.

Остается разсмотрѣть самую сложную часть машины, служащую для сложенія всѣхъ членовъ, опредѣленныхъ указаннымъ выше путемъ.

На первый взглядъ эта задача можетъ показаться неразрѣшимой, такъ какъ алгебраической зависимости между логариѳмомъ суммы и логариѳмами слагаемыхъ не существуетъ. Однако и это затрудненіе устранено Торре блистательнымъ образомъ.

Положимъ. для простоты, что надо сложить только 2 члена: $A_m x^m$ и $A_p x^p$, т. е. надо механически соединить ариѳмофоры, опредѣляющіе предыдущіе два члена съ ариѳмофоромъ, на которомъ можно было бы сразу читать сумму: $(A_m x^m + A_p x^p)$.

Мы можемъ написать:

$$\lg(A_m x^m + A_p x^p) = \lg\left[A_p x^p\left(\frac{A_m x^m}{A_p x^p} + 1\right)\right] = \lg A_p x^p + \lg\left[\frac{A_m x^m}{A_p x^p} + 1\right].$$

Такъ какъ мы уже знаемъ, какъ построить механически сумму послѣднихъ логариѳмовъ, то задача сводится къ тому, чтобы построить ариѳмофоръ, котораго перемѣщенія были бы пропорціональны

$$\lg\left(\frac{A_m x^m}{A_p x^p} + 1\right).$$

Построить ариѳмофоръ, который давалъ бы только

$$\lg\left(\frac{A_m x^m}{A_p x^p}\right),$$

или

$$\lg A_m x^m - \lg A_p x^p$$

не трудно по указанному выше способу. Если за основаніе логарифмовъ примемъ, какъ это сдѣлалъ Торре, число 10, то

$$\frac{A_m x^m}{A_p x^p} = 10^{\lg \frac{A_m x^m}{A_p x^p}}$$

и

$$\lg(A_m x^m + A_p x^p) = \lg A_p x^p + \lg\left(10^{\lg \frac{A_m x^m}{A_p x^p}} + 1\right).$$

Желаемое будетъ, такимъ образомъ, получено, если только удастся соединить между собою ариѳмофоры, угловыя перемѣщенія которыхъ

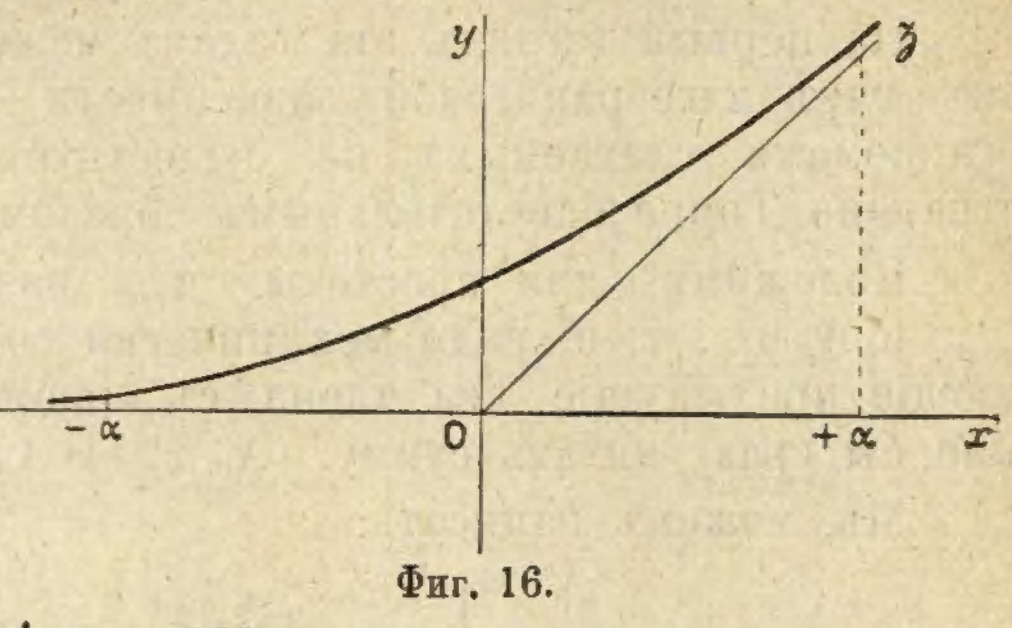
$\lg \frac{A_m x^m}{A_p x^p} = v$ и $\lg(10^v + 1) = v'$ связаны уравненіемъ:

$$\lg\left(\frac{A_m x^m}{A_p x^p} + 1\right) = \lg(10^v + 1)$$

или

$$v' = \lg(10^v + 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Такъ какъ кривая, выражаемая этимъ уравненіемъ и представленная на фиг. 16, очень быстро приближается къ своимъ ассимптотамъ: отрицательной части оси $0x$ и биссектрисѣ угла yOx, то на практикѣ можно считать, что за нѣкоторыми предѣлами $-\alpha$ и $+\alpha$ она совпадаетъ съ ассимптотами.



Фиг. 16.

Отношеніе скоростей колесъ v' и v можетъ быть представлено такимъ образомъ:

$$\frac{dv'}{dv} = \frac{10^v}{10^v + 1}$$

при $v = -\infty$ или, практически, при $v = \alpha$ отношеніе

$$\frac{dv'}{dv} = 0.$$

Но такъ какъ нѣтъ возможности построить механизмъ, удовлетворяющій послѣднимъ условіямъ, то Торре уравненію (1) даетъ предварительно такой видъ:

$$v' = \lg(10^v + 1) + mx - mx,$$

гдѣ m есть число *положительное* и выбранное такимъ образомъ, чтобы

$$v'' = \lg(10^v + 1) + mx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

$$v''' = -mx$$

количества же v'' и v''' связаны условіемъ:

$$v' = v'' + v'''.$$

Кривая, представляемая уравненіемъ (2), ассимптотически приближается къ прямымъ $y = mx$ и $y = (m+1)x$ и за нѣкоторыми предѣлами $-\beta$ и $+\beta$ можно считать ее, практически, совпадающею со своими ассимптотами. Отношеніе скоростей въ этомъ случаѣ выразится такъ:

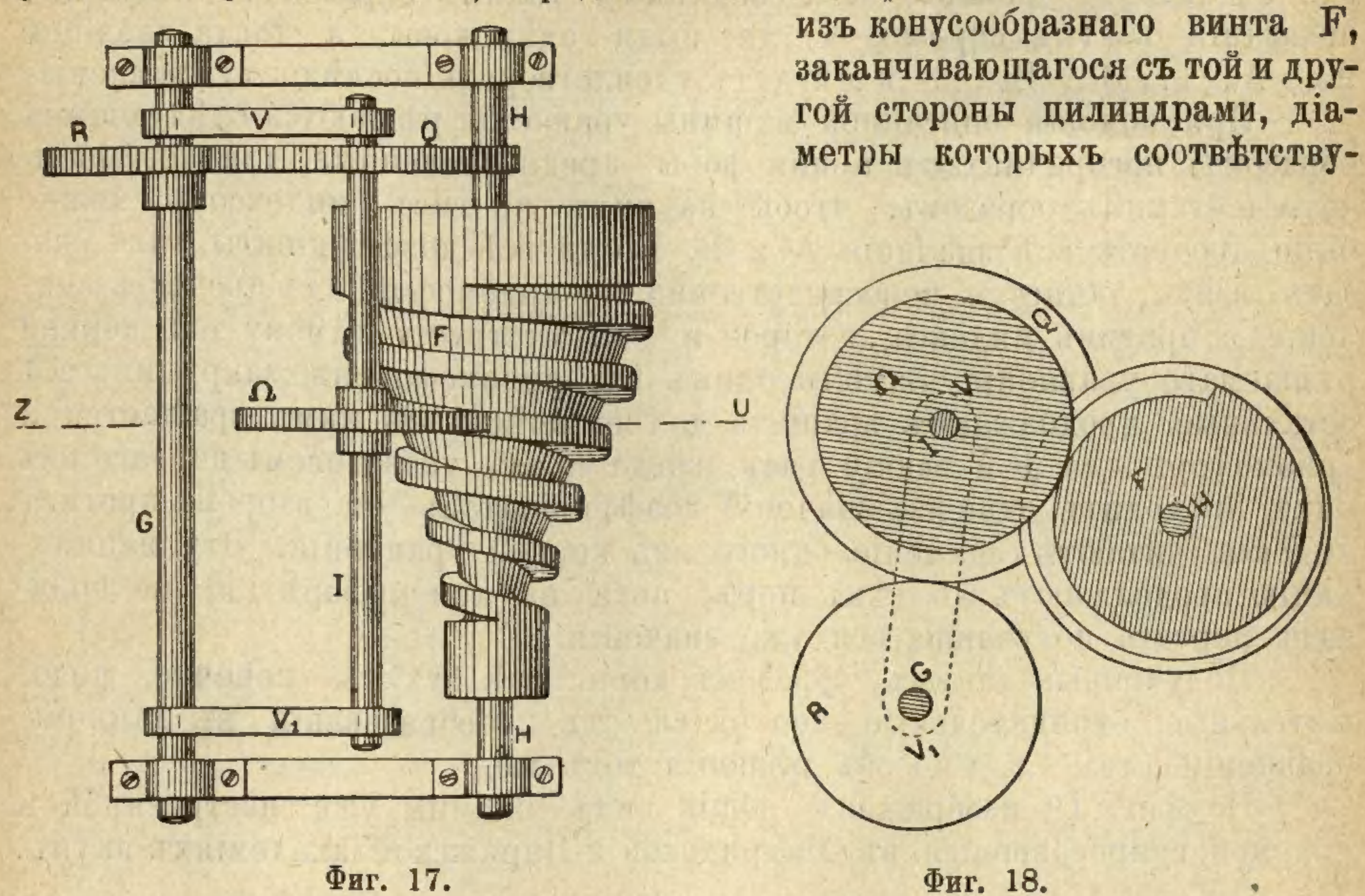
$$\frac{dv''}{dv} = \frac{10^v}{10^v + 1} + m \quad . \; . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

такъ какъ m положительно, то и

$$\frac{dv''}{dv}$$

при всѣхъ значеніяхъ v тоже больше нуля, а, слѣдовательно, является возможность построить такое механическое соединеніе, скорости частей котораго были бы связаны послѣднимъ условіемъ.

Для механическаго осуществленія этой зависимости Торре употребляетъ приспособленіе, представленное на фиг. 17 и 18 и состоящее изъ конусообразнаго винта F, заканчивающагося съ той и другой стороны цилиндрами, діаметры которыхъ соотвѣтствуютъ предѣльнымъ значеніямъ кривой — въ мѣстахъ совпаденія ея съ ассимптотами. Вдоль всей винтовой линіи и на поверхности цилиндровъ нанесены зубцы, цѣпляющіе колесо Ω, которое можетъ перемѣщаться вдоль оси, параллельной оси винта и приводить въ движеніе колеса Q и R. Чтобы колесо Ω могло перемѣщаться, сохраняя всегда плоскость параллельною самой себѣ, вся ось I можетъ слегка поворачиваться на рычагахъ V и V_1 около оси G. Размѣры винтообразнаго зубчатаго колеса можно, конечно, выбрать такимъ образомъ, чтобы отношеніе скоростей колесъ мѣнялось по любому закону и, въ частности,— удовлетворяло условію, выражаемому уравненіемъ (3).



Фиг. 17. Фиг. 18.

Что же касается v'' и v''', то эти скорости соединяются со скоростью v' при помощи ариѳмофоровъ, сочлененныхъ на подобіе соединенія, указаннаго на фиг. 15 и удовлетворяющаго условію: $v' = v'' + v'''$.

Совершенно такъ, какъ мы складывали два одночлена, можно сложить ихъ сколько угодно, т. е. получить сумму

$$A_m x^m + A_n x^n + A_p x^p + \dots$$

Съ другой стороны всякое алгебраическое уравненіе, простымъ переносомъ членовъ его изъ одной части въ другую, можетъ быть приведено къ виду

$$A_m x^m + A_n x^n + \dots = B_m x^m + B_n x^n + \dots$$

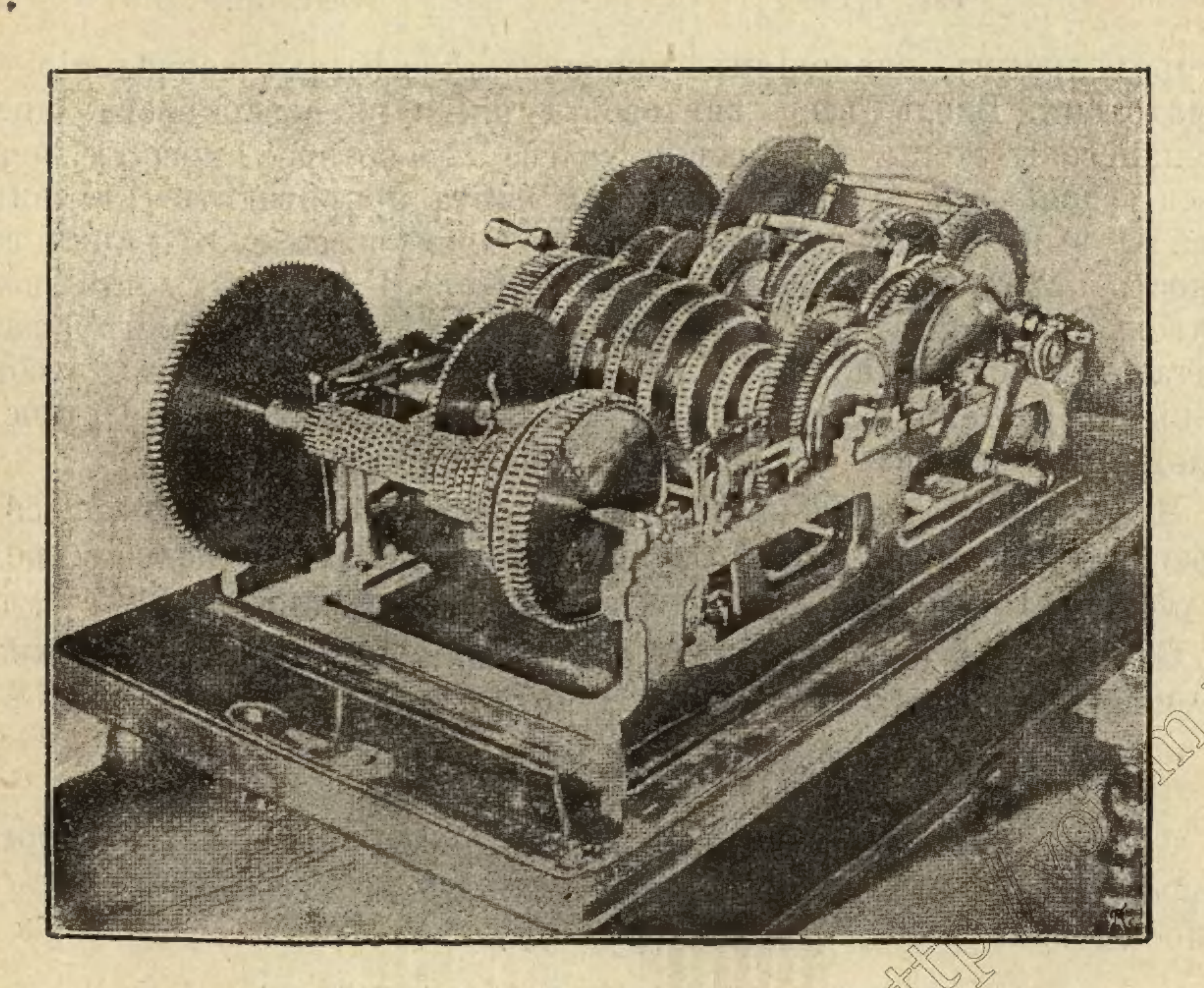
гдѣ всѣ коэффиціенты положительны. Это необходимо, такъ какъ на ариѳмофорахъ можно получать только положительныя числа, потому что они только имѣютъ логариѳмы. Величины обѣихъ частей уравненія,

какъ было указано, могутъ быть представлены двумя ариѳмофорами v и v', которые должны быть соединнны такимъ образомъ, чтобы ихъ показанія, взятыя порознь всегда были одинаковы, а тогда значенія A_m, A_n .... B_m, B_n .... и x будутъ удовлетворять послѣднему уравненію.

При помощи описанной машины уравненія рѣшаются слѣдующимъ образомъ: поворачиваютъ ариѳмофоры, предназначенные для коэффиціентовъ, такимъ образомъ, чтобы на нихъ противъ индексовъ можно было прочесть всѣ значенія A и B. Когда всѣ коэффиціенты, такъ сказать, взяты, остается непосредственно на ариѳмофорѣ (x) прочесть значеніе x противъ индекса, которое и соотвѣтствуетъ одному изъ корней рѣшаемаго уравненія. Затѣмъ одинъ изъ ариѳмофоровъ, закрѣпивъ всѣ остальные, продолжаютъ вращать далѣе; вмѣстѣ съ нимъ вращается и ариѳмофоръ для x и всякій разъ, когда предъ указателемъ перваго изъ нихъ проходитъ одно изъ значеній коэффиціентовъ—на второмъ противъ индекса читаютъ значеніе одного изъ корней уравненія. Эту манипуляцію продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока на ариѳмофорѣ (x) не получатъ перваго получавшагося уже значенія.

Полученные такимъ образомъ корни всѣ будутъ, конечно, положительные; отрицательные получатся отъ преобразованія въ данномъ уравненіи x въ $-x$. Способъ рѣшенія тотъ же.

На фиг. 19 изображенъ общій видъ машины уже построенной и и демонстрировавшейся въ Мадридской и Парижской академіяхъ наукъ.



Фиг. 19.

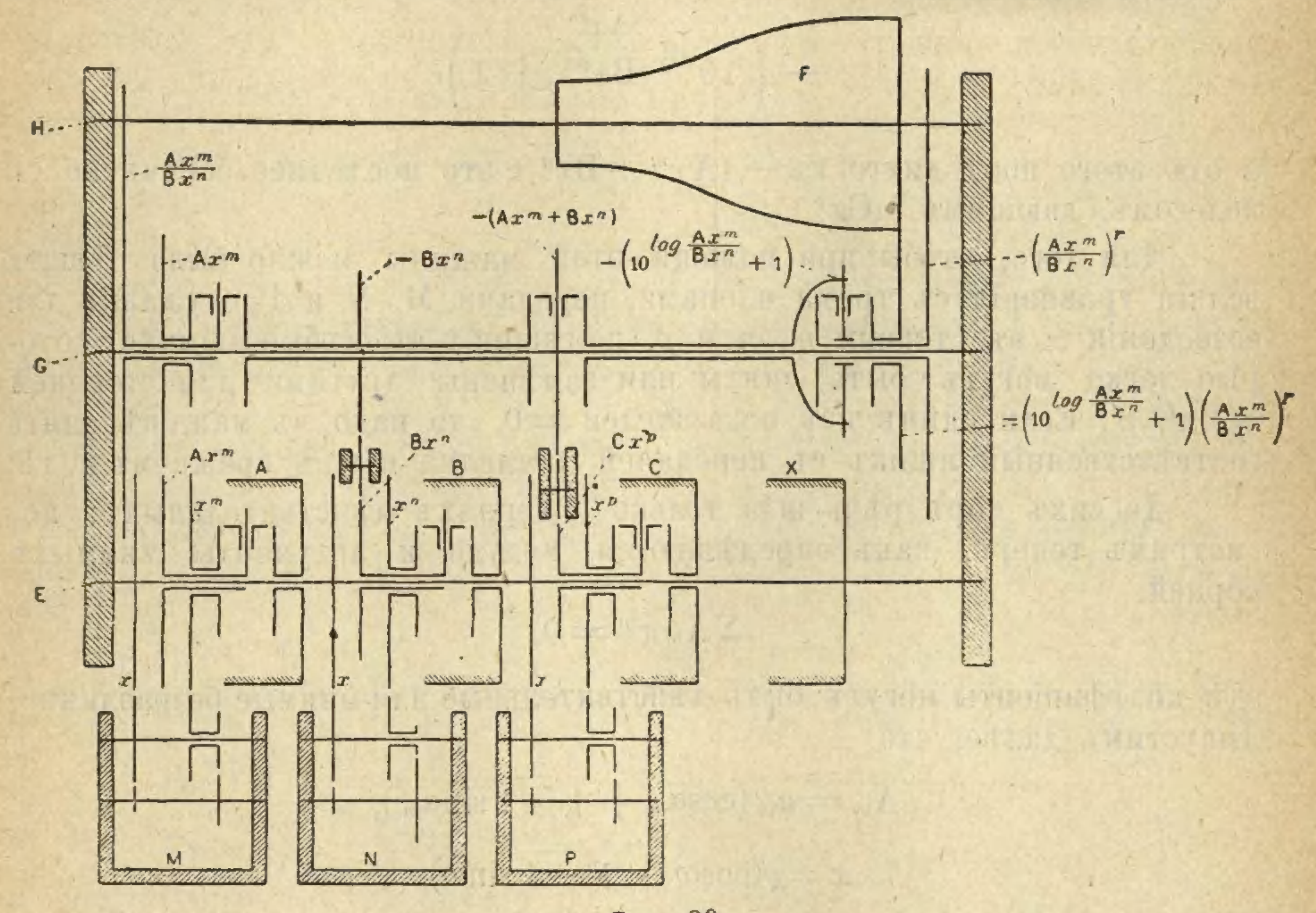
При помощи этой машины можно рѣшать только уравненія вида

$$x^9 + ax^8 = c,$$

$$x^9 + bx^7 = d,$$

при чемъ a и b могутъ мѣняться отъ 10^{-5} до 10^{10}, c и d—отъ 10^{-12} до 10^{20}, и ошибка при опредѣленіи корней не превосходитъ 0,01.

На схематическомъ рисункѣ, представленномъ на фиг. 20, изображено распредѣленіе частей въ машинѣ, которую въ настоящее время



Фиг. 20.

строитъ Carpentier для рѣшенія уравненій вида

$$Ax^m + Bx^n = Cx^p .$$

На трехъ главныхъ осяхъ E, G и H находятся ариѳмофоры, зубчатыя колеса и конусообразный винтъ F. На оси E находится и ариѳмофоръ X, на которомъ читаютъ значенія перемѣннаго x; на этой же оси мы видимъ колеса x, x, x, которыя при помощи ряда зубчатыхъ колесъ M, N и P соединены съ колесами, дающими x^m, x^n, x^p. Эти послѣднія соединены съ ариѳмофорами A, B и C, служащими для опредѣленія коэффиціентовъ A, B и C, а съ тѣми и другими вмѣстѣ сочленены колеса, дающія Ax^m, Bx^n и Cx^p. Изъ Ax^m и Bx^n, вращая въ приличномъ направленіи колеса, мы получимъ

$$lg Ax^m - lg Bx^n, \text{ т. е. } \frac{Ax^m}{Bx^n};$$

затѣмъ при помощи A переходимъ къ колесу, дающему

$$-\lg\left(10^{\lg\frac{Ax^m}{Bx^n}}+1\right) - r\lg\frac{Ax^m}{Bx^n};$$

прибавляя сюда извѣстнымъ намъ уже способомъ

$$r\lg\frac{Ax^m}{Bx^n},$$

перейдемъ къ колесу

$$-\left(10^{\lg\frac{Ax^m}{Bx^n}}+1\right),$$

а отъ этого послѣдняго къ $-(Ax^m+Bx^n)$; это послѣднее соединено съ колесомъ, дающимъ $\lg Cx^p$.

Для того, чтобы при помощи этой машины можно было рѣшать всякія уравненія съ тремя членами, передачи M, N и P, служащія для возведенія x въ степени m, n и p, помѣщены въ особые ящички, которые легко могутъ быть сняты или замѣнены другими для степеней m', n', p'. Если одинъ изъ показателей $=0$, то надо въ машинѣ снять соотвѣтственный ящикъ съ передачей, оставляя все въ прежнемъ видѣ.

До сихъ поръ рѣчь шла только о корняхъ дѣйствительныхъ; посмотримъ теперь, какъ опредѣляются модули и аргументы мнимыхъ корней.

$$\Sigma A_m x^m = 0,$$

гдѣ коэффиціенты могутъ быть дѣйствительные или мнимые безразлично. Допустимъ далѣе, что

$$A_m = a_m(\cos\alpha_m + \sqrt{-1}\sin\alpha_m),$$

$$x = \varrho(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).$$

Для всякаго значенія x, соотвѣтствующаго корню даннаго уравненія

$$\Sigma a_m \varrho^m \sin(\alpha_m + m\omega) = 0$$

$$\Sigma a_m \varrho^m \cos(\alpha_m + m\omega) = 0$$

a_m и ϱ при помощи ариѳмофоровъ изобразить легко, что же касается α_m и ω, то ихъ можно представить посредствомъ *не* логариѳмическихъ ариѳмофоровъ, а такихъ, въ которыхъ движенія были бы пропорціональны значеніямъ этихъ аргументовъ, что и не представитъ никакого затрудненія, такъ какъ α_m и ω измѣняются отъ 0 до 2π. Такъ какъ $\sin(\alpha_m + m\omega)$ и $\cos(\alpha_m + m\omega)$ могутъ принимать отрицательныя значенія, поэтому непосредственно представить ариѳмофорами выраженія, стоящія подъ знакомъ Σ невозможно, и для устраненія этого неудобства прибѣгаютъ къ указывавшемуся уже пріему. т. е. къ синусу и косинусу прибавляютъ и вычитаютъ какое-нибудь количество l *большее единицы*; тогда получимъ:

$$\Sigma a_m \varrho^m [\sin(\alpha_m + m\omega) + l - l] = 0$$

$$\Sigma a_m \varrho^m [\cos(\alpha_m + m\omega) + l - l] = 0$$

или

$$\Sigma a_m \varrho^m [l + \text{sn}(\alpha_m + m\omega)] = l\Sigma a_m \varrho^m$$

$$\Sigma a_m \varrho^m [l + \cos(\alpha_m + m\omega)] = l\Sigma a_m \varrho^m.$$

Соединяя описаннымъ выше образомъ логариѳмическіе ариѳмофоры для каждаго изъ одночленовъ, стоящихъ въ первыхъ частяхъ послѣднихъ уравненій, можно получить суммы всѣхъ стоящихъ подъ знакомъ Σ членовъ. Если эти ариѳмофоры соединить съ ариѳмофоромъ для $l\Sigma a_m \varrho^m$ такъ, чтобы угловыя перемѣщенія первыхъ и послѣдняго были одинаковы, то ариѳмофоры для ϱ и ω дадутъ соотвѣтственныя значенія аргумента и модуля для мнимыхъ корней рѣшаемаго уравненія.

Что касается рѣшенія системъ уравненій, то всякія поясненія теперь излишни, какъ какъ послѣдній разсматриваемый случай представляетъ рѣшеніе двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными и путь, которымъ надо идти при устройствѣ машинъ для рѣшенія такого рода уравненій, вполнѣ обозначился.

Въ заключеніе замѣтимъ, что при помощи такъ остроумно придуманной Торре системы коническихъ винтообразныхъ зубчатыхъ соединеній можно строить машины и для рѣшенія трансцендентныхъ уравненій, какъ напр. уравненія Кеплера и др.

Итакъ, благодаря остроумію ученаго испанскаго инженера, мы имѣемъ въ настоящее время очень простой и изящный способъ для механическаго рѣшенія уравненій.

И. Точидловскій (Одесса).

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРІЯ ЭЛЛИПСА.

(Отвѣтъ на тему, предложенную профессоромъ Ермаковымъ въ № 110 „Вѣстника").

(Продолженіе).*

V. Касательныя.

23. Прямая, имѣющая только одну общую съ эллипсомъ точку, называется *касательной* къ эллипсу.

Общая точка эллипса и касательной называется *точкой прикосновенія.* Перпендикуляръ, возставленный къ касательной въ точкѣ прикосновенія, называется *нормалью къ эллипсу* въ точкѣ M, гдѣ M—точка прикосновенія касательной.

24. По теоремѣ 11 обратной (второй случай) заключаемъ: если изъ одного изъ фокусовъ F′ опустимъ перпендикуляръ F′C на касательную и на продолженіи его отложимъ CN = F′C, затѣмъ соединимъ точку N съ другимъ фокусомъ F, то длина отрѣзка FN равна $2a$.

Изъ равенства FN = $2a$, по теоремѣ 11 прямой (второй случай), вытекаютъ нѣкоторыя слѣдствія.

*) См. „Вѣстника Оп. Физики" №№ 239, 240 и 242.

Слѣдствіе 1-е. *Оба фокуса лежатъ по одну сторону касательной.*

Дѣйствительно, при доказательствѣ теоремы 11 прямой мы убѣдились, что прямая, для которой отрѣзокъ FN, получаемый послѣ надлежащаго построенія, равенъ $2a$, не можетъ пересѣчь отрѣзка FF', а потому фокусы лежатъ по одну сторону такой прямой.

Слѣдствіе 2-е. *Точка встрѣчи* M *отрѣзка* NF *и касательной совпадаетъ съ точкой прикосновенія.*

Дѣйствительно, при доказательствѣ той же теоремы, мы убѣдились, что точка M принадлежитъ эллипсу; если бы точка прикосновенія не совпадала съ точкою M, касательная имѣла бы двѣ общихъ съ эллипсомъ точки, что противно ея опредѣленію.

Слѣдствіе 3-е. *Всѣ точки касательной, кромѣ точки прикосновенія, лежатъ внѣ эллипса.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ той же теоремѣ 11 доказано, что, если отрѣзокъ $FN = 2a$, то всѣ точки прямой, относительно которой этотъ отрѣзокъ построенъ, т. е. всѣ точки касательной, кромѣ точки M, лежатъ внѣ эллипса, ибо сумма разстояній ихъ отъ фокусовъ больше $2a$ (§ 11).

Слѣдствіе 4-е. *Всѣ точки эллипса лежатъ по одну сторону касательной, а именно—со стороны фокусовъ.*

Для доказательства этого предложенія достаточно убѣдиться, что всѣ точки, лежащія не со стороны фокусовъ относительно касательной, но съ противоположной стороны, не принадлежатъ эллипсу. Пусть X будетъ какая-нибудь изъ точекъ, лежащихъ со стороны, противоположной фокусамъ относительно касательной. Соединимъ точку X съ фокусами. Отрѣзокъ XF непремѣнно пересѣкаетъ касательную въ нѣкоторой точкѣ Y, такъ какъ, по предположенію, точка X и фокусы лежатъ по разныя стороны касательной. Согласно съ предыдущимъ слѣдствіемъ имѣемъ неравенство:

$$YF + YF' \geqslant 2a \qquad (10).$$

такъ какъ, согласно съ слѣдствіемъ 3-имъ, точка Y лежитъ либо на эллипсѣ, либо внѣ его.

Если точки X, F' и Y лежатъ на одной прямой, то находимъ

$$XF + XY > YF \qquad (11),$$

ибо Y лежитъ между точками X и F.

Точно такое же неравенство найдемъ, если точки X, Y и F не лежатъ на одной прямой, изъ треугольника XYF. Прибавивъ къ обѣимъ частямъ неравенства (11) по YF', находимъ:

$$XF + XF' > YF + YF',$$

откуда, вслѣдствіе неравенства (10), вытекаетъ:

$$XF + XF' > 2a.$$

Слѣдовательно точка X лежитъ внѣ эллипса.

25. **Теорема.** *Биссекторъ угла, смежнаго съ угломъ* FMF', *вершина котораго* M *есть точка эллипса, касается эллипса въ точкѣ его* M.

Такъ какъ биссекторы двухъ угловъ, смежныхъ одному и тому же углу, составляютъ одну прямую, то достаточно разсмотрѣть биссекторъ одного изъ этихъ угловъ, напримѣръ, биссекторъ угла $F'MN$.

На продолженіи радіуса вектора MF отложимъ $MN = MF'$. Такъ какъ M—точка эллипса, то

$$MF + MF' = 2a,$$

откуда, замѣняя прямую MF' равною ей прямой MN, получимъ:

$$MF + MN = FN = 2a \qquad (12).$$

Соединивъ точки N и F' прямою, получимъ равнобедренный треугольникъ NMF'.

Биссекторъ MA угла NMF' при вершинѣ равнобедреннаго треугольника NMF', есть въ то же время высота и медіана этого треугольника. Поэтому, назвавъ черезъ C точку встрѣчи прямыхъ AM и NF', мы находимъ:

$$F'C = CN \text{ и } F'C \perp MA.$$

Отсюда слѣдуетъ: если опустимъ изъ фокуса F' перпендикуляръ $F'C$ и отложимъ на его продолженіи $CN = F'C$, затѣмъ соединимъ точки F и N, то прямая FN (см. равенство 12) оказывается равною $2a$, а потому (теор. 11) прямая MA имѣетъ лишь одну общую съ эллипсомъ точку, именно точку M, т. е. касается эллипса въ точкѣ M.

Примѣчаніе. Въ случаѣ, когда точка эллипса M совпадаетъ съ однимъ изъ концовъ большой оси AA' предыдущее доказательство теряетъ силу. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уголъ FAF' обращается въ нуль, смежный же уголъ FAN — въ 2π; биссекторъ угла $F'AN$ обращается въ перпендикуляръ AT къ прямой $F'A$; откладывая $AN = AF'$ и соединяя точки N и F, мы не получимъ уже равнобедреннаго треугольника, ибо точки A, F и N лежатъ на одной прямой. Но это лишь упрощаетъ доказательство; въ самомъ дѣлѣ, по построенію имѣемъ:

$$NF = AF + AN = AF + AF' = 2a,$$

т. е. сразу получаемъ уравненіе (12).

Слѣдствіе 1-е. *Биссекторъ угла* FMF' *есть нормаль къ эллипсу*, ибо онъ 1) проходитъ черезъ точку прикосновенія M и 2) перпендикуляренъ къ биссектору MA угла NMF', смежнаго съ угломъ FMF'.

Слѣдствіе 2-е. Такъ какъ всякій уголъ можно раздѣлить пополамъ, то *во всякой точкѣ эллипса можно провести къ нему касательную и нормаль.*

26. **Теорема, обратная предыдущей.** *Касательная къ эллипсу въ точкѣ его* M *есть биссекторъ угла, смежнаго съ угломъ* FMF'. Пусть прямая MA касается эллипса въ точкѣ его M, т. е. имѣетъ съ нимъ лишь одну общую точку, именно точку M. Изъ фокуса F' опустимъ перпендикуляръ $F'C$ на касательную и отложимъ на его продолженіи $CN = F'C$; затѣмъ соединимъ точки N и F. По второму слѣдствію § 24, точка встрѣчи отрѣзка NF съ касательной совпадаетъ съ точкой при-

косновенія M; длина же отрѣзка FN равна, по теоремѣ 11 обратной, $2a$. Отсюда имѣемъ:

$$NM + MF = FN = 2a;$$

но мы имѣемъ также $MF' + MF = 2a$, ибо точка M лежитъ на эллипсѣ, а потому $NF = MF'$, т. е. треугольникъ NMF'—равнобедренный. Слѣдовательно, прямая MA, служащая, по построенію, высотой треугольника NMF', будетъ также биссекторомъ угла при вершинѣ NMF', что и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Если точка прикосновенія M совпадаетъ съ одной изъ вершинъ A или A', касательная дѣлитъ пополамъ уголъ FAN, т. е. перпендикулярна къ оси AA'. Въ этомъ случаѣ, какъ и въ соотвѣтствующемъ случаѣ прямой теоремы, придется слегка измѣнить доказательство.

Слѣдствіе 1-е. Такъ какъ всякій уголъ допускаетъ лишь одинъ биссекторъ, то *во всякой точкѣ эллипса къ нему можно провести только одну касательную.*

Слѣдствіе 2-е. *Касательная одинаково наклонена къ радіусамъ векторамъ точки прикосновенія.*

Дѣйствительно, такъ какъ касательная MA есть биссекторъ угла NMF', то $\angle AMF' = \angle AMN$. Но углы AMN и BMF, какъ вертикальные, равны, а потому — $AMF' = \angle BMF$.

Слѣдствіе 3-е. Въ вершинахъ эллипса A и A' касательныя перпендикулярны къ оси AA', какъ это только что указано въ примѣчаніи. Поэтому ось AA' служитъ нормалью къ эллипсу въ точкахъ A и A'. Точно также и въ вершинахъ B и B' касательныя перпендикулярны къ оси BB', такъ какъ биссекторъ внѣшняго угла FBK равнобедреннаго треугольника FBF' параллеленъ основанію FF' и потому перпендикуляренъ къ высотѣ этого треугольника BO. Сама же ось BB' служитъ нормалью къ эллипсу въ точкахъ B и B'.

27. **Лемма.** *Если биссекторъ угла* B *треугольника* ABC *есть въ то же время медіана треугольника, то стороны треугольника* AB *и* BC *равны между собою.*

Пусть O—точка, въ которой биссекторъ угла ABC встрѣчаетъ сторону AC. По свойству биссектора имѣемъ:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AO}{OC}.$$

Но такъ какъ, по предположенію,

$$AO = OC,$$

то

$$\frac{AB}{BC} = 1,$$

откуда

$$AB = BC.$$

28. **Лемма.** *Если биссекторъ* BS *внѣшняго угла* FBK *треугольника* FBF′ *перпендикуляренъ къ медіанѣ его* BO, *то стороны треугольника* FB *и* F′B *равны.*

Такъ какъ медіана BO, по предположенію, перпендикулярна къ биссектору BS угла FBK, то она дѣлитъ пополамъ уголъ FBF′, смежный съ угломъ FBK. Итакъ медіана BO есть въ то же время биссекторъ угла FBF′, а потому, по леммѣ 27, сторона FB треугольника FBF′ равна сторонѣ F′B.

29. **Теорема.** *Если точка эллипса* M *не совпадаетъ ни съ одной изъ вершинъ эллипса* A, A′, B *и* B′, *то касательная въ точкѣ* M *эллипса не перпендикулярна къ прямой* MO, *соединяющей точку* M *съ центромъ.*

Только двѣ точки эллипса A и A′ лежатъ на прямой FF′ (§ 2), остальныя же точки его лежатъ внѣ этой прямой. Точно также лишь двѣ точки эллипса B и B′ имѣютъ равные радіусы векторы, ибо прямая BB′, представляющая собою геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ фокусовъ, не можетъ встрѣчать эллипсъ болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ.

Поэтому, если точка M не лежитъ ни въ одной изъ вершинъ эллипса, то, во-первыхъ, точки M, F и F′ не лежатъ на одной прямой, а во-вторыхъ — радіусы векторы точки M, MF и MF′ не равны.

Допустимъ, теперь, что касательная къ эллипсу въ точкѣ M, не совпадающей ни съ одной изъ вершинъ эллипса, перпендикулярна къ прямой MO. По теоремѣ 26 касательная къ эллипсу въ точкѣ M есть биссекторъ угла, смежнаго съ угломъ FMF′. Такимъ образомъ биссекторъ угла, смежнаго съ угломъ M треугольника FMF′, былъ бы, по сдѣланному допущенію, перпендикуляренъ къ медіанѣ того же треугольника MO. Но тогда, по леммѣ 28, стороны MF и треугольника FMF′ MF′ были бы равны, что прямо противорѣчитъ доказанному выше неравенству ихъ.

30. **Теорема.** *Лишь двѣ прямыя* AA′ *и* BB′ *служатъ осями эллипса.*

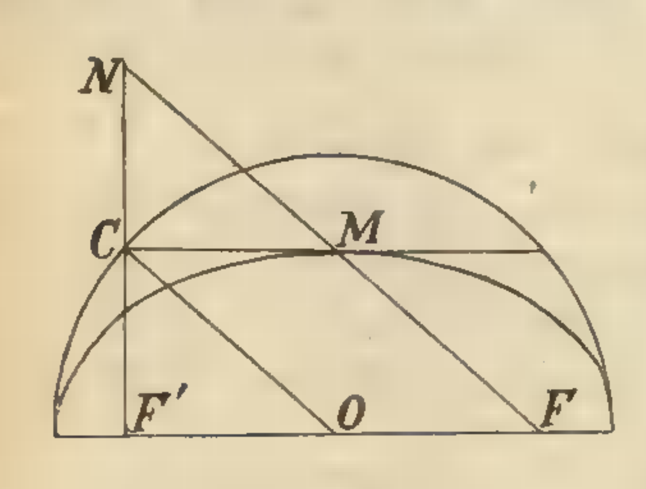
Прежде всего замѣтимъ, что ось эллипса непремѣнно проходитъ черезъ его центръ. Дѣйствительно, пусть Z будетъ ось эллипса, не проходящая черезъ центръ. Опустимъ изъ центра эллипса перпендикуляръ на ось Z; этотъ перпендикуляръ (§ 15) встрѣтитъ эллипсъ въ двухъ точкахъ M и M′, причемъ центръ O будетъ срединой хорды MM′, лежащей на прямой, перпендикулярной къ оси, что, по теоремѣ 14, невозможно, если прямая Z не проходитъ черезъ центръ. Итакъ осью эллипса, кромѣ прямыхъ AA′ и BB′, можетъ быть лишь прямая, проходящая черезъ центръ эллипса. Пусть K будетъ одна изъ точекъ, въ которой встрѣчаетъ эллипсъ эта третья ось. Черезъ точку K проведемъ перпендикуляръ къ прямой KO; по теоремѣ 29 этотъ перпендикуляръ не можетъ быть касательной къ эллипсу, а потому этотъ перпендикуляръ, имѣя общую съ эллипсомъ точку K, есть сѣкущая эллипса; слѣдовательно перпендикуляръ этотъ встрѣчаетъ эллипсъ еще въ одной точкѣ X. Но тогда мы имѣли бы хорду KX, перпендикулярную къ оси Z и не дѣлящуюся осью пополамъ, что (см. § 14) невозможно.

Итакъ эллипсъ не можетъ имѣть болѣе двухъ осей AA′ и BB′.

31. **Задача.** *Въ данной точкѣ эллипса провести къ нему касательную.*

Пусть M—данная точка эллипса. Соединивъ ее прямыми съ фокусами, строимъ биссекторъ одного изъ угловъ, смежныхъ съ угломъ FMF′; этотъ биссекторъ и будетъ, по теоремѣ 25, искомой касательной. Задача имѣетъ лишь одно рѣшеніе (гл. 26, слѣдствіе 1-е).

32. **Теорема.** *Основаніе перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса на касательную, находится на окружности круга, построеннаго на большой оси, какъ на діаметрѣ.*



Фиг. 21.

Опустимъ изъ фокуса F′ (черт. 21) перпендикуляръ F′C на касательную къ эллипсу въ точкѣ его M и на продолженіи его отложимъ CN = F′C. Соединивъ точки F и N прямою, получимъ (§ 24) отрѣзокъ FN, равной $2a$. Соединимъ также прямою точку C съ центромъ эллипса O. Тогда получимъ два треугольника CF′O и NF′F, которые подобны по общему углу F и пропорціональности сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ. Пропорціональность сторонъ вытекаетъ изъ равенства

$$\frac{F'F}{F'O}=\frac{F'N}{F'C}=2,$$

которое является непосредственнымъ слѣдствіемъ построенія точки N. Изъ подобія треугольниковъ CF′O и NF′F находимъ:

$$\frac{FN}{OC}=2,$$

откуда

$$OC=\frac{FN}{2}=\frac{2a}{2}=a.$$

Итакъ разстояніе точки C отъ средины большой оси равно половинѣ большой оси, а потому точка C лежитъ, какъ и требовалось это доказать, на окружности, описанной на большой оси, какъ на діаметрѣ.

Примѣчаніе. Если точка прикосновенія эллипса M совпадаетъ съ одной изъ вершинъ A или A′, то предыдущее доказательство непримѣнимо. Но теорема имѣетъ мѣсто и для этого случая, что прямо вытекаетъ изъ слѣдствія 2-го главы 26-й.

Обратная теорема. *Прямая, перпендикулярная къ концу отрѣзка F′C, соединяющаго какую-нибудь точку C окружности, построенной на большой оси, какъ на діаметрѣ, съ фокусомъ,—касается эллипса.*

Продоживъ отрѣзокъ F′C на длину CN = F′C, соединимъ прямою точки N и F (черт. 21).

Изъ равенства

$$\frac{F'N}{F'C}=\frac{F'F}{F'O}=2,$$

заключаемъ, какъ и въ прямой теоремѣ, что треугольники NF′F и CF′O подобны. Изъ подобія ихъ выводимъ:

$$\frac{NF}{CO} = 2, \text{ или } \frac{NF}{a} = 2,$$

откуда

$$NF = 2a,$$

а потому, по теоремѣ 11, прямая CM касается эллипса.

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Свѣтовыя явленія при соприкосновеніи озона съ различными жидкостями (C. R., CXXIII, 1005).—Разрѣжая озонированный воздухъ при помощи водяной тромпы, г. *Marius Otto* замѣтилъ свѣтъ внутри тромпы. Свѣтъ этотъ возникалъ въ мѣстѣ соприкосновенія воды съ озономъ, и вода, вышедшая изъ тромпы, сохраняла способность свѣтиться впродолженіе 5—6 секундъ.

Для объясненія этого явленія можно допустить:

1) или что, благодаря пониженію давленія, озонъ, заключающійся въ пузырькахъ газа, которые проникаютъ въ воду тромпы, диссоціируетъ при соприкосновеніи съ водой, давая свѣтъ;

2) или что озонъ образуетъ съ водой непрочное фосфоресцирующее соединеніе;

3) или, наконецъ, что свѣтовыя явленія обусловливаются энергичнымъ окисленіемъ органическихъ веществъ, содержащихся въ водѣ.

Для ближайшаго изученія этого явленія авторъ пользовался цилиндрическимъ стеклянымъ сосудомъ въ 50 cm длины съ діаметромъ въ 5 cm. Сосудъ этотъ былъ закрытъ на обоихъ концахъ и снабженъ двумя кранами. Сосудъ этотъ наполнялся озонированнымъ воздухомъ (40—50 mg озона въ 1 литрѣ) подъ различными давленіями, затѣмъ въ него вводили опредѣленный объемъ испытуемой жидкости и сильно взбалтывали содержимое сосуда въ темной комнатѣ. Оказалось:

1) что чистая, не содержащая ни минеральныхъ ни органическихъ примѣсей вода совершенно не даетъ описанныхъ свѣтовыхъ явленій;

2) что обыкновенная питьевая вода, содержащая слѣдовательно слѣды органическихъ веществъ, свѣтится послѣ взбалтыванія нѣсколько секундъ;

3) что когда этотъ свѣтъ исчезнетъ, его можно вызвать снова, хотя и менѣе интенсивно, если снова взболтать воду;

4) что послѣ 5—6 взбалтываній свѣтъ исчезаетъ окончательно, хотя трубка содержитъ еще много озона;

5) что достаточно замѣстить такую потерявшую способность свѣтиться воду свѣжей, чтобы снова получить свѣченіе;

6) что спиртъ свѣтится менѣе интенсивно, но болѣе продолжительно, бензинъ свѣтится слабѣе спирта, молоко и другія органическія жидкости свѣтятся сильнѣе воды, тіофенъ даетъ свѣтящіеся пары.

Изъ этихъ фактовъ слѣдуетъ, что описанное явленіе зависитъ по всей вѣроятности отъ окисленія озономъ органическихъ веществъ.

В. Г.

РАЗНЫЯ ИЗВѢСТІЯ.

6-го декабря с. г. Философская Ассоціація и Общество Чешскихъ Математиковъ въ Прагѣ торжественно отпраздновали 300-лѣтнюю годовщину со дня рожденія знаменитаго философа и математика, Рене Декарта.

Международная Метеорологическая Конференція, собиравшаяся въ сентябрѣ с. г. въ Парижѣ, учредила между прочимъ спеціальную коммиссію подъ предсѣдательствомъ г. Hergesell'я, поручивъ ей организовать изслѣдованіе высшихъ слоевъ атмосферы при помощи воздушныхъ шаровъ, пускаемыхъ одновременно изъ различныхъ пунктовъ. Первый опытъ былъ произведенъ въ ночь съ $^1/_{13}$ на $^2/_{14}$ ноября, когда одновременно изъ Парижа, Берлина, Страсбурга и С.-Петербурга были пущены шары безъ наблюдателей, снабженные самопишущими приборами; изъ Берлина, Мюнхена, Варшавы и С.-Петербурга поднялись въ то же время шары съ воздухоплавателями. Изъ этихъ послѣднихъ шаровъ берлинскій достигъ 5630 m, низшая температура, которая наблюдалась съ него, была —24^0,4; мюнхенскій шаръ поднялся до 3500 m и наблюдалъ температуру въ —6^0,5; варшавскій шаръ отмѣтилъ —20^0 при 2000 m, и петербургскій—27^0,5 при 4300m.

Что касается до шаровъ безъ наблюдателей, то судьба петербургскаго шара нашимъ читателямъ уже исвѣстна: онъ лопнулъ на небольшой высотѣ; берлинскій шаръ достигъ 6000 m и отмѣтилъ —24^0, страсбургскій поднялся до 7700 m, отмѣтивъ —30^0 на высотѣ въ 6000 m, и, наконецъ, парижскій шаръ достигъ наибольшей высоты въ 15000 m, отмѣтивъ—60^0.

Этотъ послѣдній шаръ (*Aérophile* № 3) былъ пущенъ G. Hermite'омъ и G. Besançon'омъ со двора завода de la Villette въ 2 ч. 6 м. утра; онъ былъ наполненъ 373 m^3 газа, его подъемная сила въ моментъ поднятія была 246 kg, такъ что подъемная сила свѣтильнаго газа равнялась 809 g на кубическій метръ. Температура въ моментъ поднятія была—3^0, давленіе 761 mm, направленіе вѣтра ENE. До вторника $^3/_{15}$ ноября о шарѣ не было никакихъ свѣдѣній. Во вторникъ было получено письмо изъ маленькой деревушки Graide въ окрестностяхъ Dinant съ извѣстіемъ, что шаръ найденъ въ сосѣднемъ лѣсу. Діаграмма, начерченная самопишущимъ приборомъ, показала, что низшая температура (—60^0) была достигнута черезъ 3 часа послѣ того, какъ шаръ достигъ наибольшей высоты, на которой онъ оставался довольно долго, —и незадолго до того момента, когда на высотѣ шара должно было показаться солнце. Восхожденіе шара продолжалось всего 40 минутъ, спускъ его—1$^1/_2$ часа; въ моментъ достиженія наибольшей высоты термометръ отмѣтилъ—55^0.

G. Hermite и G. Besançon указываютъ, что для подобныхъ описанному ночныхъ полетовъ требуется значительняя подъемная сила шара, такъ какъ днемъ дѣлу много помогаютъ солнечные лучи, нагрѣвающіе шаръ и уменьшающіе его вѣсъ.

Въ августѣ с. г. *Crova* и *Houdaille* произвели рядъ актинометрическихъ и гигрометрическихъ наблюденій, а также наблюденій надъ поляризаціей неба на склонѣ Монблана. Наблюденіямъ сильно мѣшала пасмурная погода; тѣмъ не менѣе оказалось, что напряженіе солнечной радіаціи быстро возрастаетъ съ увеличеніемъ

высоты, какъ видно изъ слѣдующихъ данныхъ, представляющихъ среднія величины изъ всего ряда наблюденій

Grands-Mulets (3020 m)	1,497 кал.
Шамуни (1050 m)	1,242 „
Монпелье (48 m), среднее за августъ	1,059 „

$^7/_{19}$ августа въ Grands-Mulets въ 11 ч. 3 м. отмѣчена для напряженія солнечной радіаціи величина въ 1,793 кал., *большая солнечной постоянной Pouillet.* Работы Langley'я, Савельева и Crova заставляютъ думать, что величина солнечной постоянной мало отличается отъ 3 калорій.

Было замѣчено также пониженіе напряженія солнечной радіаціи около полудня, которое Crova наблюдалъ и раньше. Атмосферная поляризація $^6/_{18}$-го августа въ 6 ч. 45 м. вечера была равна въ Grands-Mulets 0,788 при темно-синемъ небѣ. Это—наивысшая изъ наблюдавшихся величинъ.

РЕЦЕНЗІИ.

Къ ученію о дифференціалѣ и интегралѣ. Составилъ преподаватель Полоцкаго кадетскаго корпуса Владиміръ Шидловскій. С.-Петербургъ 1896 г.

Авторъ не желаетъ, чтобы дифференціаломъ перемѣнной $y = f(x)$ называли, какъ это теперь общепринято, извѣстную часть $f'(x)dx$ ея полнаго приращенія: онъ желаетъ, чтобы дифференціаломъ называли *полный* произвольно малый приростъ перемѣнной, т. е. выраженіе $f'(x)dx + \varepsilon$, и думаетъ, что такимъ опредѣленіемъ вносится особая ясность въ понятіе о дифференціалѣ и интегралѣ. Можно принять какое угодно опредѣленіе дифференціала, но историческій и педагогическій опытъ показали, что желательное для г-на Шидловскаго опредѣленіе дифференціала вноситъ чрезвычайную смуту, сбивчивость и крайнюю условность въ дальнѣйшее изложеніе дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія—и это всего лучше должно быть извѣстно автору, который, принявъ указанное опредѣленіе, приходитъ съ необходимостью къ тому выводу, что равенства

$$dx = f'(x)dx; \int_0^x 2xdx = x^2$$

не суть равенства. Съ педагогической точки зрѣнія данное авторомъ опредѣленіе дифференціала прямо вредно; вообще же оно представляетъ возвратъ къ очень старой терминологіи, отъ которой, вслѣдствіе крайнихъ ея неудобствъ, теперь безусловно отказываются. Книжка заключаетъ въ себѣ 15 страницъ, не заключаетъ въ себѣ ничего новаго, вредна по тенденціи и стоитъ 40 копѣекъ.

С. Шатуновскій.

ЗАДАЧИ.

№ 379. Показать, что десятичная дробь

0,123456789 10 11 12 13 14......

не есть дробь періодическая.

С. Шатуновскій (Одесса).

№ 380. Двѣ равныя окружности съ центрами A и B касаются другъ друга въ точкѣ C, черезъ которую проведена къ нимъ общая касательная MN. На обѣихъ окружностяхъ отъ точки C симметрично относительно прямой MN отложены дуги CD и CE, равныя каждая 120^0. Затѣмъ проведены еще двѣ окружности, изъ которыхъ первая касается окружности A въ точкѣ D и прямой MN въ нѣкоторой точкѣ H, а вторая симметрична съ первой относительно прямой MN. Показать, что площадь криволинейной фигуры $HDCE$, ограниченной дугами четырехъ окружностей, равна

$$\frac{r^2}{3}(24\sqrt{3}-5\pi),$$

гдѣ r есть радіусъ каждой изъ окружностей, имѣющихъ центры въ точкахъ A и B.

П. Свѣшниковъ (Уральскъ).

№ 381. Показать, что если между сторонами a, b, c треугольника существуетъ зависимость

$$b^4+c^4=a^2(b^2+c^2),$$

то

$$1)\ \operatorname{tg}^2 A=\operatorname{tg}B\,.\operatorname{tg}C;\quad 2)\ bc=a^2\cos(B-C);\quad 3)\ \frac{\sin 2B}{\sin 2C}=\frac{c^2}{b^2};$$

$$4)\ \frac{\operatorname{cotg}A}{\operatorname{cotg}B}=\frac{b^2}{c^2};\quad 5)\ \frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin(C-A)}{\sin(A-B)};$$

$$6)\ \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{3A}{2}+\operatorname{tg}^2 {}^1\!/_2(B-C)=0.$$

(Заимств.) *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 382. Даны два треугольника ABC и DEF. Стороны перваго пропорціональны числамъ a, b, c, стороны второго пропорціональны квадратамъ этихъ чиселъ. Показать, что отношеніе площади ортоцентрическаго треугольника, соотвѣтствующаго треугольнику ABC, къ площади треугольника, вершины котораго суть точки касанія вписаннаго въ треугольникъ DEF круга, равно отношенію площадей треугольниковъ ABC и DEF.

М. Зиминъ (Орелъ).

№ 383. Построить треугольникъ по данной сторонѣ, по высотѣ, опущенной на эту сторону и по биссектору противолежащаго угла.

С. Конюховъ (Харьковъ).

№ 384. Опредѣлить minimum выраженія:

$$\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 y$$

при

$$\sin^2 x+\sin^2 y={}^3\!/_2.$$

(Заимств.) *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 9 (3 сер.) — Рѣшить въ цѣлыхъ и положительныхъ числахъ уравненіе:

$$2ax + a^2 = y^2,$$

гдѣ a есть цѣлое и положительное число. Какая геометрическая задача приводитъ къ этому уравненію?

Представивъ a въ видѣ k^2s, гдѣ s есть произведеніе простыхъ множителей, взятыхъ въ первыхъ степеняхъ, что всегда можетъ быть достигнуто разложеніемъ числа a на простые множители и надлежащей ихъ группировкой, получимъ:

$$2k^2sx + k^4s^2 = y^2,$$

откуда видно, что y необходимо есть кратное числа ks; положивъ $y = ksy_1$ и раздѣливъ уравненіе на k^2s, получимъ:

$$2x + k^2s = sy_1^2,$$

откуда видно, что $2x$ дѣлится на s. Слѣдовательно

1) при s четномъ x есть кратное числа $s:2$. Положивъ $x = (s:2)x_1$ и сокративъ предыдущее уравненіе на s, получимъ:

$$x_1 = y_1^2 - k^2,$$

гдѣ $y_1 > k$ есть число произвольное.

2) При s нечетномъ x дѣлится на s. Положивъ $x = sx_1$, получимъ

$$x_1 = \frac{y_1^2 - k^2}{2},$$

откуда видно, что $y_1 > k$ есть произвольное число, четное при k четномъ и нечетное при k нечетномъ.

Къ данному уравненію приводитъ задача: *опредѣлить гипотенузу и катеты раціональнаго прямоугольнаго треугольника, если гипотенуза больше одного изъ катетовъ на данное число* a.

NB. Было получено 7 неполныхъ рѣшеній этой задачи.

№ 298 (3 сер.).—Изъ центра O круга, вписаннаго въ данный треугольникъ ABC, радіусомъ AO описана окружность, пересѣкающая BC въ точкахъ B' и C'. Опредѣлить стороны и площадь треугольника $AB'C'$ по даннымъ сторонамъ треугольника ABC.

Если черезъ K и L обозначимъ соотвѣтственно точки касанія вписаннаго въ треугольникъ ABC круга со сторонами BC и AB, то, принявъ во вниманіе равенство треугольниковъ OAL и OKC', найдемъ

$$KC' = AL = p - a \text{ и } B'C' = b + c - a,$$

гдѣ p есть полупериметръ треугольника ABC, а a, b, c — его стороны.

Такъ какъ далѣе

$$BK = p - b,\ K'B = p - a,$$

то

$$BB' = a - b \text{ (или } b - a),$$

но по теоремѣ Stewart'а имѣемъ:

$$\overline{AB}^2 . B'C + \overline{AC}^2 . BB' - \overline{AB'}^2 . BC = BC . B'C . B'B,$$

или

$$c^2 b + b^2(a - b) - \overline{AB'}^2 . a = ab(a - b),$$

откуда

$$AB' = \sqrt{\frac{b(b + c - a)(a + c - b)}{a}}.$$

Точно такъ же найдемъ и

$$AC' = \sqrt{\frac{c(b + c - a)(a + b - c)}{a}}$$

Для вычисленія площади треугольника $AB'C'$ можно воспользоваться равенствомъ:

$$\text{пл. } AB'C' : \text{пл. } ABC = B'C' : BC = (b + c - a) : a.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Лежебокъ* (Ярославль); *Э. Заторскій* (Вильно); *С. Зайцевъ* (Курскъ).

№ 305 (3 сер.).—Въ треугольникѣ ABC вершины A, B и C соединены съ центромъ O круга описаннаго; прямыя AO, BO и CO продолжены до пересѣченія со сторонами даннаго треугольника въ точкахъ P, Q и R. По даннымъ сторонамъ треугольника ABC вычислить стороны треугольника PQR.

Продоживъ BQ до пересѣченія въ точкѣ S съ окружностью круга, описаннаго около треугольника ABC, получимъ:

$$BQ(2R - BQ) = AQ(b - AQ), \ldots\ldots (1).$$

$$\overline{BQ}^2 b = c^2(b - AQ) + a^2 AQ - b.AQ(b - AQ), \ldots (2).$$

гдѣ R есть радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Опредѣливъ изъ уравненій (1) и (2) BQ и AQ и вычисливъ подобнымъ же способомъ отрѣзокъ AR, изъ треугольника ABQ получимъ:

$$\overline{QR}^2 . c = \overline{BQ}^2 . AR + \overline{AQ}^2(c - AR) - c . AR . (c - AR),$$

откуда вычислимъ QR. Точно такъ же опредѣлимъ и стороны PQ и PR. Въ полученныхъ для QR, PQ и PR выраженіяхъ останется лишь замѣнить R его выраженіемъ въ функціи сторонъ треугольника ABC.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

NB.—Въ рѣшеніи г. *З.* точка O ошибочно принята за центръ круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC.

№ 306 (3 сер.).—Опредѣлить площадь прямоугольнаго треугольника, зная стороны двухъ квадратовъ, вписанныхъ въ него.

Если m есть сторона вписаннаго квадрата, соотвѣтствующаго катетамъ, а n—соотвѣтствующаго гипотенузѣ, то

$$m=\frac{ab}{a+b} \text{ и } n=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{ab+a^2+b^2}, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (\alpha)$$

гдѣ a и b суть катеты треугольника.

Обозначивъ искомую площадь черезъ x, изъ уравненій (α) получимъ

$$2nx-m^2n=2m\sqrt{x^2-m^2x}.$$

Положительный корень этого уравненія равенъ

$$x=\frac{m^2(\sqrt{m^2-n^2}+m)}{2\sqrt{m^2-n^2}}.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *Лежебокъ* (Ярославль); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Вильно).

№ 307 (2 сер.).—Построить четыреугольникъ $ABCD$, вписанный въ данную окружность, зная разность между діагональю AD и стороной DC, если $AB=BC=AC$.

Вписавъ въ данную окружность равносторонній треугольникъ ABC, на сторонѣ его AC опишемъ дугу, вмѣщающую уголъ въ 120^0, и отъ точки A отложимъ въ этой дугѣ хорду AE, равную данной разности. Прямая AE встрѣтитъ, очевидно, окружность въ точкѣ D, четвертой вершинѣ искомаго четыреугольника, ибо $\angle ADC=60^0$, $\angle DCE=120^0-\angle ADC=60^0$ и $CD=DE$.

Лежебокъ (Ярославль); *Ю. Идельсонъ* (Одесса); *М. Зиминъ* (Елецъ); *А. Ярцевъ*, *Д. Цельмеръ* (Тамбовъ); *Э. Заторскій* (Вильно).

№ 308 (3 сер.).—Показать, что если x, y и z суть положительныя числа, то

$$2(x+y+z)^2(xy+yz+xz)>3(xy+yz+xz)^2+9xyz(x+y+z).$$

Имѣемъ

$$\frac{x+y+z}{3}-\frac{xy+yz+xz}{x+y+z}=\frac{x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz}{3(x+y+z)}=\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2}{6(x+y+z)}.$$

а такъ какъ величины

$$(x-y)^2,\ (y-z)^2,\ (x-z)^2$$

положительны, то, очевидно,

$$\frac{x+y+z}{3}>\frac{xy+yz+xz}{x+y+z} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1).$$

Извѣстно, что среднее ариѳметическое нѣсколькихъ количествъ больше ихъ средняго гармоническаго; поэтому

$$\frac{x+y+z}{3} > \frac{3xyz}{xy+yz+xz} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Сложивъ неравенства (1) и (2) и освободивъ полученное выраженіе отъ знаменателей, прійдемъ къ неравенству, справедливость котораго требовалось доказать.

Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

№ 309 (3 сер.).—Исключить φ изъ уравненій:

$$x = \frac{1+\sin\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\,.\cos\varphi}; \; y = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi+\sin\varphi\,.\cos\varphi}.$$

Пусть

$$1+\sin\varphi = z,\; 1+\cos\varphi = t. \quad \ldots\ldots (1)$$

Тогда данныя уравненія можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{aligned} xzt - x &= z, \\ yzt - y &= t. \end{aligned} \qquad (2).$$

Перемноживъ эти уравненія, получимъ:

$$xy(zt)^2 - (2xy+1)zt + xy = 0,$$

откуда

$$zt = \frac{2xy+1 \pm \sqrt{4xy+1}}{2xy} \quad \ldots, \ldots (3)$$

Сложивъ уравненія (2) и пользуясь равенствомъ (3), найдемъ

$$z+t = \frac{(x+y)(1 \pm \sqrt{4xy+1})}{2xy} \quad \ldots\ldots (3)$$

Равенства (1) даютъ:

$$(z+t-1)^2 - 2zt = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто $z+t$ и zt найденныя ихъ значенія получимъ:

$$\left[\frac{(x+y)(1 \pm \sqrt{4xy+1}) - 2xy}{2xy}\right]^2 - \frac{2xy+1 \pm \sqrt{4xy+1}}{xy} = 0,$$

или

$$x^4 + y^4 - 2x^3y - 2xy^3 - 5x^2y^2 + 2x^3 + 2y^3 + x^2 + y^2 = 0.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *Э. Заторскій* (Вильно).

№ 310 (3 сер.).—Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (изъ „Собранія стереометрическихъ задачъ, требующихъ примѣненія тригонометріи“ Н. Рыбкина, стр. 21, № 31):

„Въ правильной четыреугольной пирамидѣ сторона основанія и боковое ребро относятся какъ $\sqrt{3}:\sqrt{2}$. Черезъ діагональ основанія проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Опредѣлить наклонъ этой плоскости къ основанію и углы сѣченія".

Обозначимъ черезъ S вершину пирамиды, а черезъ $ABCD$ — ея основаніе; пусть плоскость, проведенная черезъ діагональ основанія BD параллельно SC, пересѣкаетъ AS въ точкѣ K. Если O есть центръ основанія, то очевидно, что $KO \parallel SC$, а потому $AK = KS$.

По условію задачи

$$\frac{AD}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

а такъ какъ

$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AD}^2,$$

то

$$AC = AS\sqrt{3},$$

откуда видно, что

$$\angle ASC = 120^0,\ \angle SCA = \angle KOA = 30^0.$$

Такимъ образомъ наклонъ плоскости къ основанію равенъ 30^0.

Такъ какъ $SK = AK$, то

$$OK = SC:2;$$

кромѣ того имѣемъ:

$$BK = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{OK}^2} = SC,$$

слѣдовательно $OK = BK:2$. т. е.

$$\angle KBD = \angle KDB = 30^0,\ \angle BKD = 120^0.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *Лежебокъ* (Ярославль).

№ 312 (3 сер.).—Безъ помощи логариѳмовъ рѣшить систему уравненій:

$$x^{5/2} = 3,(5)y;\ y^{5/2} = 60,75x.$$

Изъ данныхъ уравненій имѣемъ:

$$x^{5/2} = \frac{2^5}{3^2}y;\quad y^{5/2} = \frac{3^5}{2^2}x,$$

откуда

$$xy = 2^2.3^2,\ \text{и}\ y = \frac{2^2.3^2}{x}.$$

Подставивъ это значеніе y въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ

$$x^{5/2} = \frac{2^7}{x};\ x = 4,\ y = 9.$$

М. Зиминъ (Елецъ); *А. Евлаховъ* (Пятигорскъ); *Лежебокъ* (Ярославль); *А. Казаровъ* (Спб.); *Э. Заторскій* (Вильно); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1896.—№ 2.

Sur les triangles formés par les tangentes communes à trois cercles donnés. Par M. *E.-N. Barisien*. Пусть R_1, R_2, R_3 суть радіусы трехъ окружоостей O_1, O_2, O_3, изъ которыхъ ни одна не лежитъ внутри другой. Обозначимъ чрезъ D_1, D_2, D_3 разстоянія между центрами O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 и чрезъ

α, α' и α_1, α_1' внѣшнія и внутреннія касательныя къ O_2 и O_3,
β, β' и β_1, β_1' » » » O_3 и O_1,
γ, γ' и γ_1, γ_1' » » » O_1 и O_2.

Разсматривая эти касательныя какъ отрѣзки, ограниченные точками касанія, получимъ

$$\alpha=\alpha'=\sqrt{D_1^2-(R_1-R_3)^2},\ \alpha_1=\alpha_1'=\sqrt{D_1^2-(R_2+R_3)^2}$$

и т. п.

Эти касательныя, взятыя по три такъ, что ни одна пара изъ нихъ не относится къ одной и той-же парѣ окружностей, образуютъ 64 тр-ка, изъ которыхъ 8 составлены внѣшними касательными (напр. α, β, γ), 8 — внутренними касательными (напр. α_1, β_1, γ_1) и 48—тѣми и другими (напр. α_1, β, γ).

Положимъ, что тр-къ ABC составленъ касательными α, β, γ; обозначимъ чрезъ a, b, c—его стороны, чрезъ r, r_1, r_2, r_3 — радіусы вписаннаго и внѣвписанныхъ въ него круговъ, чрезъ R—радіусъ описаннаго круга и чрезъ S площадь этого тр-ка. Положивъ

$$a+b+c=2p,\ \alpha+\beta+\gamma=2s,\ \alpha_1+\beta_1+\gamma_1=2t$$

и замѣтивъ, что

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}=\frac{r_1}{p}=\frac{p-b}{r_3}=\frac{p-c}{r_2}=\frac{S}{p(p-a)}=\frac{(p-b)(p-c)}{S}.$$

и т. п.

чрезъ проэктированіе фигуръ BO_2O_3C, CO_3O_1A, AO_1O_2B соотвѣтственно на BC, CA, AB, получимъ:

$$a=\alpha+R_2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+R_3\operatorname{ctg}\frac{C}{2},$$

$$b=\beta+R_3\operatorname{ctg}\frac{C}{2}+R_1\operatorname{ctg}\frac{A}{2},$$

$$c=\gamma+R_1\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+R_2\operatorname{ctg}\frac{B}{2},$$

или

$$\left.\begin{aligned} a&=\alpha+\frac{R_2(p-b)+R_3(p-c)}{r},\\ b&=\beta+\frac{R_3(p-c)+R_1(p-a)}{r},\\ c&=\gamma+\frac{R_1(p-a)+R_2(p-b)}{r};\end{aligned}\right\}\ (1)$$

отсюда

$$p-a=\frac{r(s-\alpha)}{r-R_1},\ p-b=\frac{r(s-\beta)}{r-R_2},\ p-c=\frac{r(s-\gamma)}{r-R_3}; \qquad (2)$$

такимъ образомъ a, b, c выражаются чрезъ r, величина котораго опредѣляется изъ ур-нія

$$S=p\,.\,r=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

если изъ него исключить p при помощи равенства (2). Такимъ путемъ авторъ получаетъ ур-ніе

$$r^2 s - r\sum \alpha R_1 + \Sigma(s-\alpha)R_2R_3 - (s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)=0,$$

изъ котораго находитъ

$$r=\frac{\Sigma\alpha R_1 \pm 2U}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad (3).$$

гдѣ U — площадь тр-ка $O_1O_2O_3$. Одно изъ этихъ значеній r соотвѣтствуетъ тр-ку α, β, γ, другое—тр ку α', β', γ'.

Формулы (1), (2) и (3), при надлежащемъ измѣненіи знаковъ + и —, примѣнимы ко всѣмъ тр-мъ, составленнымъ внѣшними касательнѣми. При помощи ихъ опредѣляются всѣ элементы этихъ тр-въ, напр.

$$a=r\left(\frac{s-\beta}{r-R_2}+\frac{s-\gamma}{r-R_3}\right),$$

$$S=r^2\sum\frac{s-\alpha}{r-R_1}-\frac{r^2(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)}{(r-R_1)(r-R_2)(r-R_3)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r(s-\beta)(s-\gamma)}{(r-R_2)(r-R_3)}.$$

Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés. Par M. *V. Jerabek.* Если коническія сѣченія касаются двухъ прямыхъ AB и AC въ опредѣленныхъ точкахъ B и C, то геометрическое мѣсто ихъ фокусовъ есть *строфоида*, а оси ихъ обертываютъ *параболу*. Авторъ статьи изслѣдуетъ (синтетически) свойства этой параболы относительно тр-ка ABC.

Notes mathématiques. 1. Если двѣ внутреннія биссектрисы тр-ка равны, то тр-къ равнобедренный. (См. обз. J. M. E. 1895).

2. *Un théorème de James Gregory.* Кривыя, уравненія которыхъ въ прямоугольныхъ и полярныхъ координатахъ суть

$$y=f(x) \text{ и } r=F(\vartheta),$$

при условіи

$$y=r=\frac{dx}{d\vartheta}$$

имѣютъ одну и ту-же длину; площадь, ограниченная первой кривой вдвое болѣе площади, ограниченной второю кривою; уголъ, составленный осью y-въ съ касательною къ первой кривой, равенъ углу, составленному радіусомъ векторомъ съ касательной къ второй кривой.

Notes extraites de la correspondance mathématique et physique. (Suite). 9. *Memoire sur les propriétés générales des courbes algébriques* par *Michel Reiss* (1837). Въ этомъ мемуарѣ разсматриваются свойства сѣкущихъ алгебраической кривой

$$y^m+(ax+b)y^{m-1}+(cx^2+dx+e)y^{m-2}+\ldots\ldots=0.$$

Кромѣ извѣстныхъ уже въ то время теоремъ Ньютона, Cotes'a, Carnot и Maclaurin'a, Reiss доказалъ еще слѣдующую теорему.

Положимъ, что сѣкущая u, параллельная оси y-въ, пересѣкаетъ кривую въ точкахъ A_1, A_2, ... , A_m, ординаты которыхъ суть y_1, y_2, ... y_m, а абсцисса, общая съ абсциссой сѣкущей, равна x. Тогда

$$y_1+y_2+\ldots\ldots+y_m=-(ax+b) \qquad (1).$$

т. е. центръ среднихъ разстояній точекъ $A_1, A_2 \ldots, A_m$, при перемѣщеніи сѣкущей параллельно самой себѣ, описываетъ прямую (Ньютонъ). Обозначивъ чрезъ r радіусъ кривизны въ точкѣ (x, y) и чрезъ α—уголъ, составленный касательной въ этой точкѣ съ осью y-въ, получимъ:

$$y'=\mathrm{ctg}\alpha,\ r=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},\ \text{откуда}\ y''=\frac{1}{r\sin^3\alpha}.$$

Но дифференцированіе ур-нія (1) даетъ:

$$y_1'+y_2'+\ldots+y_n'=-a,\ y_1''+y_2''+\ldots+y_n''=0,$$

слѣдовательно

$$\mathrm{ctg}\alpha_1+\mathrm{ctg}\alpha_2+\ldots+\mathrm{ctg}\alpha_m=-a \qquad (2)$$

и

$$\frac{1}{r_1\mathrm{sn}^3\alpha_1}+\frac{1}{r_2\mathrm{sn}^3\alpha_2}+\ldots\frac{1}{r_m\,\mathrm{sn}^3\alpha_m}=0; \qquad (3)$$

это равенство и составляетъ теорему Reiss'а.

Bibliographie. Complement d'algèbre élémentaire. Par *E. Colart.* 1895.

Nécrologie. 23-го января 1895 года скончался въ Льежѣ проф. математики Joseph Graindorge, родившійся 9-го августа 1843 г.

Solutions de questions proposées. №№ 976, 987, 988, 995, CCXIX.

Questions d'examen. №№ 719—724.

Questions proposées. №№ 1056—1059.

Д. Е.

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *М. Зимина* (Орелъ) 315, 317, 319, 322, 324, 325, 327, 328, 330, 331, 332, 333, 334, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343 (3 сер.); *Н. Соколова* (Самара) 357 (3 сер.); *Терентьева* (Гельсингфорсъ) 334, 336 (3 сер.); *Кингi* (Гельсингфорсъ) 338 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 346, 351, 359, 361, 362 (3 сер.).

ОТВѢТЫ РЕДАКЦІИ.

Я. Полушкину (с. Знаменка).—Это доказательство теоремы Птоломея общеизвѣстно. См. напр. учебникъ Киселева.

С. Гирману (Варшава).—Будетъ напечатано.

ПОПРАВКА. Въ текстѣ задачи № 364 (№ 240 „Вѣстника") напечатано: Тремя точками вписаннаго...... вмѣсто: Тремя точками касанія вписаннаго, и т. д.

Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 18-го Декабря 1896 г.
„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. № 39.